

## Дељивост

25.02.2023.

- а) Раставити број 2023 на просте чиниоце;  
б) Навести све делиоце броја 2023;  
в) Одреди остатке при дељењу броја 2023 бројевима 13, 17 и 19.
- Да ли је број а)  $2^9 + 5^{12}$ ; б)  $2^{10} + 5^{12}$ , прост или сложен?
- а) Доказати да остатак при дељењу квадрата целог броја бројем 3 не може бити 2;  
б) Доказати да остатак при дељењу квадрата целог броја бројем 4 не може бити ни 2 ни 3.
- Доказати да је број  $222^{555} + 555^{222}$  сложен.
- Доказати да не постоји природан број  $n$ , такав да је испуњена једнакост
$$n(n+1)(n+2) = 888888888888.$$
- Доказати да је број  $7^{2000} - 1$  дељив бројем 10.
- (Метода последње цифре) Да ли следеће једначине имају решења у скупу природних бројева:  
а)  $x^2 + 5y = 1234567$ ; б)  $4^x + 9^y = 11^z$ .
- (Метода производа) Одредити све целе бројеве који су решења једначина:  
а)  $x^2 - y^2 = 31$ ; б)  $xy + 3y - 5x = 18$ ; в)  $xy + x = 3y - 4$ .
- (Метода количника)  
а) Одредити све целе бројеве који се могу приказати у облику  $\frac{a^2+2}{a-1}$ , где је  $a \in \mathbb{Z}$  и  $a \neq 1$ ;  
б) Решити једначину у скупу  $\mathbb{Z}$ :  $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$ .
- Наћи најмањи природан број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 даје редом остатке 1, 2, 3, 4 и 5.
- Доказати да за свако  $m \in \mathbb{N}$  важи  $6|m^3 - m$ .
- Доказати да је број  $n^3 + 2n$  дељив бројем 3, за сваки природан број  $n$ .
- Доказати да за свако  $n \in \mathbb{N}$  важи  $6|2n^3 - 3n^2 + n$ .
- Доказати да је разлика квадрата два непарна цела броја дељива бројем 8.
- Колико има природних бројева  $n$  таквих да је број  $n^2 + 2n + 29$  квадрат неког природног броја?
- Највећи природан број  $n$  за који је производ  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2016 \cdot 2017$  дељив са  $7^n$  је?
- Колико различитих простих чинилаца има број  $391^2 - 379^2$  ?
- Последња цифра производа  $2^{100} \cdot 3^{50}$  је?
- Збир бројева  $26 *$  и  $3\#2$  је дељив са 5 и 9, при чему  $*$  и  $\#$  представљају неке цифре. Ако је  $S$  збир цифара које могу заменити  $\#$ , израчунај  $S$ .