Gimnazija „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Sadu
Pripremna nastava iz matematike za upis u prvi razred smera talentovani učenici u matematičkoj gimnaziji
Februar 2023. G.
Profesor Monika Popov

Transformacije algebarskih izraza

1. Uprosti izraz $\dfrac{5b-\dfrac{3}{2}}{7}-\dfrac{4b-2}{2}+2b-\dfrac{10b-3}{14}$
2. Ako je $\dfrac{3}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{12}{c}=13$ koliko je $(3-a)a+(4-b)b+(12-c)c$?
3. Dokazati jednakost a) $\dfrac{5^4-3^4}{5^4+2\cdot 15^2+3^4}=\dfrac{8}{17}$; b) $\dfrac{5^4-2^6}{5^4+2^4\cdot 5^2+2^6}=\dfrac{17}{33}$.
4. Ako je $n\in\mathbb{N}$, $n>1$ tada izraz $n^4+2n^3-n^2-2n$ ima činioce koji su četiri uzastopna broja. Dokazati.
5. Dat je polinom $P(x)=(x+1)^3-(x+2)(x^2+2x-1)$. Srediti ga po opadajućim stepenima
6. Dokaži da je nejednakost $(x+5)^3<x(x+7)^2+(x+13)^2$ tačna za svako x.
7. Nađi sve realne brojeve x i y za koje važi a) $x^2+y^2+2x-6y+10=0$;
   b) $x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=0$;
   c) $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$.
8. "Oslobodi se" apsolutnih oznaka u izrazima: a) $\dfrac{2x+|x|}{3}+x+|x|$; b) $\left(\dfrac{x-5+|x-5|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-5-|x-5|}{2}\right)^2$.
9. Izračunaj zbir $1999^2-1998^2+1997^2-1996^2+\ldots+3^2-2^2+1^2$.
10. Ako je $n\in\mathbb{N}$ tada je $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ potpun kvadrat. Dokazati.
11. Dokazati Diofantove identitete: a) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$;
    b) $(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$;
    c) $(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)$.
12. Skrati razlomak a) $\dfrac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$; b) $\dfrac{a^{3n}-a^nb^{2n}}{a^{3n}-2a^{2n}b^n+a^nb^{2n}}$; c) $\dfrac{(a^2+a+1)^2-(a-1)^2}{(a^2-a+1)^2-(a+1)^2}$.
13. Odredi vrednost izraza a) $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$;
    b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$;
    c) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
14. Izračunaj vrednost zbira $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.
15. Dokaži da je broj $3^{n+2}\cdot 2^{2n+3}+3^{n+3}\cdot 4^{n+2}$ deljiv sa 7 za svaki prirodan broj n.