Priprema za upis u I razred gimnazije za učenike sa posebnim sposobnostima za matematiku i računarstvo i informatiku

-Deljivost-

03.02.2024.

1. (a) Rastaviti broj 2024 na proste činioce.

   (b) Navesti sve delioce broja 2024.

   (c) Odredi ostatke pri deljenju broja 2024 brojevima $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

2. Dokazati da je broj $222^{555} + 555^{222}$.

3. Da li je broj (a) $2^9 + 5^{12}$ (b) $2^{10} + 5^{12}$ prost ili složen?

4. Odrediti poslednju cifru broja 8^{2024}.

5. Dokazati da ne postoji prirodan broj n takav da je ispunjena jednakost

$$n(n+1)(n+2) = 88888888888.$$

6. Dokazati da je broj $7^{2000} - 1$ deljiv brojem 10.

7. (Metoda poslednje cifre.) Da li sledeće jednačine imaju rešenja u skupu prirodnih brojeva: (a) $x^2 + 5y = 1234567$. (b) $4^x + 9^y = 11^z$.

8. (Metoda proizvoda.) Odrediti sve cele brojeve koji su rešenja jednačina:

   (a) $x^2 - y^2 = 31$. (b) $xy + 3y - 5x = 18$. (c) $xy + x = 3y - 4$.

9. (Metoda količnika.) (a) Odrediti sve cele brojeve koji se mogu prikazati u obliku $\frac{a^2+2}{a-1}$, gde je a ceo broj različit od 1. (b) Rešiti jednačinu u skupu $\mathbb{Z}$: $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

10. Naći najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa $2, 3, 4, 5$ i 6 daje redom ostatke $1, 2, 3, 4$ i 5.

11. Dokazati da za svako $m \in \mathbb{N}$ važi $6 | m^3 - m$.

12. Dokazati da je broj $n^3 + 2n$ deljiv brojem 3, za svaki prirodan broj n.

13. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $6 | 2n^3 - 3n^2 + n$.

14. Odrediti najmnanji prirodan broj n za koji je $n!$ deljiv sa 990.

15. Dokazati da je razlika kvadrata dva neparna cela broja deljiva sa 8.

16. (2016.) Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da je broj $n^2 + 2n + 29$ kvadrat nekog prirodnog broja?

17. (2017.) Najveći prirodan broj n za koji je proizvod $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 2016 \cdot 2017$ deljiv sa 7^n je?

18. (2018.) Koliko različitih prostih činilaca ima broj $391^2 - 379^2$?

19. (2019.) Poslednja cifra proizvoda $2^{100} \cdot 3^{50}$ je?

20. (2020.) Zbir brojeva $26*$ i $3 \circ 2$ je deljiv sa 5 i 9. Ako je S zbir cifara koje mogu zameniti $\circ$, tada je :
(a) $0 \leq S < 3$ (b) $3 \leq S < 5$ (c) $5 \leq S < 7$ (d) $7 \leq S < 9$ (e) $9 \leq S < 11$ (f) $11 \leq S < 13$ (g) $13 \leq S < 15$ (h) $S \geq 15$.